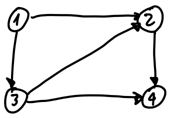
PROBLEMA DEL MASSIMO FLUSSO

DATO UN GRAFO $G = (V, E)$ (V = VERTICI, E = EDGE (ARCHI)) CON $V = \{1, 2, 3 \dots n\}$ ED $|E| = m$ (CARDINALITÀ DI E)

↳ ARCHI ORIENTATI



• OGNI ARCO HA UNA CAPACITÀ $C_{uv} \in \mathbb{R}^+$, CON "U" NODO SORGENTE E "V" NODO DESTINATARIO $(u,v) \in E$

• NODO SORGENTE : SOLO ARCHI USCENTI → $W^-(s) = \emptyset$ (INSIEME DI ARCHI CHE HANNO COME SECONDO ESTREMO IL NODO "S" → NODO "S" COME NODO DI ENTRATA)

• NODO POZZO : SOLO ARCHI ENTRANTI → $W^+(t) = \emptyset$

• ALTRI NODI : INTERMEDI

• UN VETTORE $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ CON $m = |E|$ VIENE DETTO **FLUSSO S-t AMMISSIBILE** SE SODDISFA I SEGUENTI VINCOLI :

1) ↳ OGNI COMPONENTE $x_1 \dots x_m \in \bar{x}$ DEVE ESSER COMPRESA TRA $0 \le \bar{x}_{uv} \le c_{uv}$ ($\bar{x}_{uv}$: PORTATA ATTUALE DEL TUBO; c_{uv}: MAX PORTATA DEL TUBO (u,v))

2) ↳ $$\underbrace{\sum_{(u,v) \in W^-(v)} \bar{x}_{uv}}_{\text{FLUSSO CHE ENTRA}} - \underbrace{\sum_{(v,k) \in W^+(v)} \bar{x}_{vk}}_{\text{FLUSSO CHE ESCE}} = 0 \qquad \forall v \in V - \{s,t\}$$ "TUTTI I NODI TRANNE s,t"

FLUSSO CHE ENTRA − FLUSSO CHE ESCE = 0

FLUSSO CHE ENTRA = TUTTI I FLUSSI ENTRANTI IN V

FLUSSO CHE ESCE = TUTTI I FLUSSI USCENTI DA V

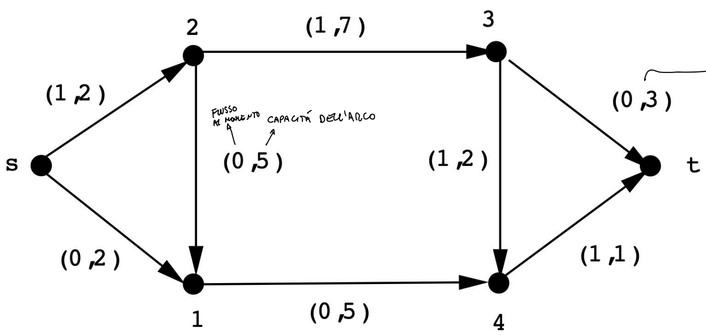


Figura 7.1: Flusso ammissibile

IN TUTTI, (a, b) DEVO AVERE $a \ge b$

INOLTRE, TUTTO CIÓ CHE ENTRA DEVE USCIRE (TRANNE PER "S" O "t")

$a \ge 0$

• **PROBLEMA : MASSIMIZZARE f** (LINEARE) → f NON ILLIMITATA SUPERIORMENTE

↳ NON PUÒ ESSERE VUOTO L'INSIEME AMMISSIBILE : C'È SEMPRE ALMENO 1 SOLUZIONE (QUELLA BANALE O NULLA)

MAX f

DOVE f È : $$-\sum_{(s,k) \in W^+(s)} x_{sk} + f = 0$$

$\sum_{(s,k) \in W^+(s)} x_{sk}$ = SOMMA DEI FLUSSI CHE ESCONO DAL NODO S (CIOÈ a DI PRIMA SOMMATI TUTTI)

f → FLUSSO TOTALE DI f

DEVO MASSIMIZZARE FLUSSO : DEVO TENER CONTO DELLE CAPACITÀ (NON DEVO CREARE COLLO DI BOTTIGLIA)

• DEFINIZIONE : TAGLIO DEL GRAFO ORIENTATO → PARTIZIONE DEI NODI (DIVIDO I NODI IN 2 INSIEMI)

‖

UN INSIEME DEVE CONTENERE "s" E L'ALTRO "t"

Definizione 7.2.1 *Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, con $s, t \in V$, e $s \neq t$, si definisce taglio s-t una partizione dei nodi $(W, \bar{W})$ tale che $s \in W$ e $t \in \bar{W}$.*

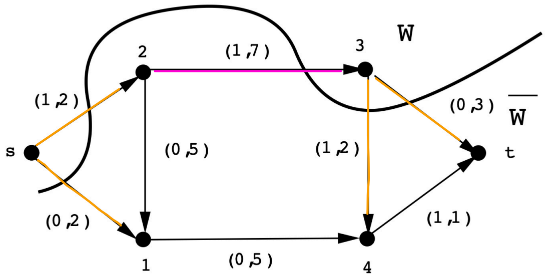


Figura 7.2: Taglio s-t con $W = \{s, 3\}$ e $\bar{W} = \{1, 2, 4, t\}$

$W = \{s, 3\}$

$\bar{W} = \{t, 1, 2, 4\}$

$C(W, \bar{W}) = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} c_{uv}$ → CAPACITÀ DEL TAGLIO

SOMMA DELLE CAPACITÀ DEGLI ARCHI ATTRAVERSATI DAL TAGLIO (SOLO QUELLI CHE PARTONO DA W E ARRIVANO IN $\bar{W}$) → CAPACITÀ : SECONDA COMPONENTE

→ $2 + 2 + 2 + 3 = 9$

Nella figura 7.2 è illustrato un taglio s-t, con $W = \{s, 3\}$ e $\bar{W} = \{1, 2, 4, t\}$. È importante notare come una qualsiasi partizione dei nodi in due classi, tale che s e t appartengano a classi diverse.

FLUSSO NETTO : → UGUALE PER QUALSIASI TAGLIO

$$\bar{F}(W, \bar{W}) = \underbrace{\sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{uv}}_{\text{SOMMA DEI FLUSSI USCENTI DA W ED ENTRANTI IN } \bar{W}} - \underbrace{\sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{vu}}_{\text{SOMMA DEI FLUSSI USCENTI DA } \bar{W} \text{ ED ENTRANTI IN W}}$$

} FLUSSI ATTUALI : PRIMA COMPONENTE

→ $= 2 - 1 = 1$

• TEOREMA

Teorema 7.2.2 *Dato un flusso ammissibile $\bar{x}$, il flusso netto $F(W, \bar{W})$ in ogni taglio $(W, \bar{W})$ è pari al valore del flusso $\bar{f}$, cioè*

$$F(W, \bar{W}) = \bar{f}.$$

• TEOREMA :

Teorema 7.2.3 *Sia dato un flusso ammissibile $\bar{x}$ in G. Il flusso netto di un taglio qualunque è minore o uguale alla capacità dello stesso taglio. Cioè, se $(W, \bar{W})$ è un taglio, risulta*

$$F(W, \bar{W}) \leq C(W, \bar{W}).$$

• IL FLUSSO NETTO DI UN QUALSIASI TAGLIO È SEMPRE ≤ DELLA CAPACITÀ DELLO STESSO TAGLIO

• TEOREMA

Teorema 7.2.4 *Il valore del massimo flusso f^* è minore o uguale alla capacità di un qualunque taglio s-t, cioè*

$$f^* \leq C(W, \bar{W})$$

per ogni taglio $(W, \bar{W})$. → QUINDI $f^* \leq C_{min}$

• FLUSSO MASSIMO : COME CALCOLARLO

→ CAMMINI AUMENTANTI :

DA s A t : TUTTI GLI ARCHI DIRETTI DEVONO ESSERE NON SATURI $(a, b) : a < b$

TUTTI GLI ARCHI INVERSI DEVONO ESSERE NON VUOTI $(a, b) : a > 0$

→

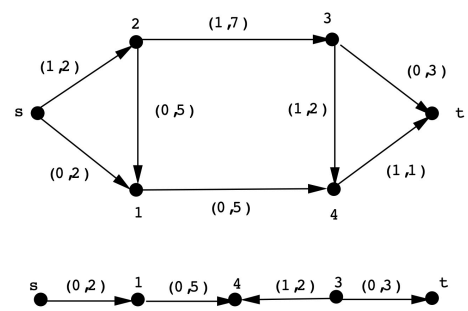


Figura 7.3: Cammino aumentante da s a t

• CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ : QUANDO SO CHE POSSO FERMARMI ? → QUANDO NON HO PIÙ CAMMINI AUMENTANTI E $\bar{f} = C_{MIN}$

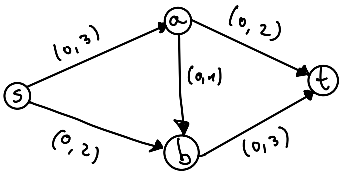
→ TEOREMA : MASSIMO FLUSSO, TAGLIO MINIMO

UNA DISTRIBUZIONE DI FLUSSO È OTTIMA SSE RISULTA $\bar{f} = C_{MIN}$ DOVE $\bar{f}$ È IL VALORE DI FLUSSO DI $\bar{x}$

→ ARRIVATO QUI MI FERMO

ESEMPIO DI MASSIMO FLUSSO

GRAFO DI PARTENZA



- VEDO GIÀ CHE NON POSSO USARE $b \to a$ MA POTREI $a \to b$

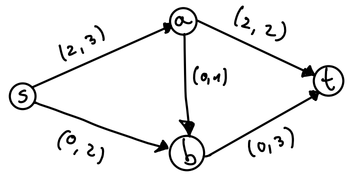
$f_0 = 0$

1° POSSIBILE CAMMINO: $s \to a \to t$

CAPACITÀ RESIDUA: $b - a$!!!

$s \to a = 3$
$a \to t = 2$ } MIN = 2 → AUMENTO DI 2 IN QUESTO PERCORSO

$f_0 + 2 = f_1 = 2$

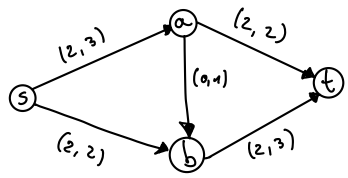


→ VEDO CHE NON POSSO USARE: $b \to a$ E $a \to t$

2° POSSIBILE: $s \to b \to t$

$s \to b = 2$
$b \to t = 3$ } MIN = 2

$f_1 + 2 = 4 = f_2$



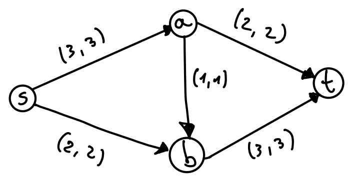
→ AGGIUNGO ALTRI PERCORSI NON AMMISSIBILI: $s \to b$

- ULTIMO PERCORSO RIMASTO DISPONIBILE:

$s \to a \to b \to t$

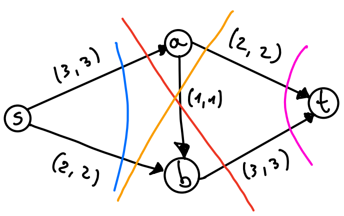
$s \to a = 1$
$a \to b = 1$
$b \to t = 1$ } MIN = 1

$f_2 + 1 = 5 = f_3$



⇒ NON HO PIÙ PERCORSI POSSIBILI:
FLUSSO IN ENTRATA SU t = FLUSSO MASSIMO = 5 *

- ARRIVATI QUI, CONTROLLO CHE $C_{MIN}(W, \bar{W})$ = FLUSSO MASSIMO



→ TAGLI MINIMI = [rosso] O [arancione] → $C_{MIN} = 3$

NOI ABBIAMO TROVATO 5, QUINDI NON VA BENE *

- SCAMBIANDO IL 2° POSSIBILE CAMMINO CON L'ULTIMO, NOTERÒ CHE IL FLUSSO MASSIMO DIVENTERÀ $3 = C_{MIN}$, ALLORA AVRÒ TROVATO IL FLUSSO MASSIMO (3)

- NOTA: SE UTILIZZO UN ARCO INVERSO, ANZICHÉ AUMENTARE IL FLUSSO ATTUALE LO DEVO DIMINUIRE E LA DIFFERENZA È SEMPLICEMENTE LA COMPONENTE a, E NON $b-a$

ALGORITMO DI FORD E FULKERSON

- OBIETTIVO: TROVARE MAX. FLUSSO CHE PUÒ ANDARE DA "s" A "t" IN UN GRAFO ORIENTATO CON CAPACITÀ SUGLI ARCHI
- PASSAGGI:
  1) INIZIA CON FLUSSO ZERO / FLUSSO INIZIALE SU TUTTI GLI ARCHI
  2) TROVO UN CAMMINO DA "s" A "t" CHE RISPETTI LE CAPACITÀ (ARCO DRITTO: (a,b): $a<b$, ARCO INVERSO: $a>0 \wedge a<b$)
  3) TROVO VALORE MINIMO TRA GLI ARCHI DEL PERCORSO ($b-a$ = VAL.)
  4) AGGIORNO I FLUSSI <u>SOLO</u> SUL PERCORSO SCELTO (+1 CON ARCO DIRETTO, −1 SU ARCO MINIMO → SULLA VAR. a)
  5) RIPETO IL PASSO 2 FINCHÉ NON HO PIÙ PERCORSI
  6) ARRIVATO QUI, CONTROLLO CHE LA CAPACITÀ DEL TAGLIO MINIMO SIA UGUALE AL FLUSSO MASSIMO → $\bar{F} = C_{MIN}$